

# Zwei Anwendungen des Paillier-Kryptosystems: Blinde Signatur und Three-Pass-Protocol

Anselme Tueno\*

13. September 2009

Basierend auf dem Kryptosystem von Paillier [5] und dem damit eingeführten Problem der zusammengesetzten Residuenklasse werden in diesem Artikel zwei kryptographische Verfahren vorgeschlagen. Zunächst wird die Signatur von Paillier in ein blindes Signaturverfahren umgewandelt. Dabei wird aus einer verblendeten Nachricht eine blinde Signatur erzeugt, so dass man dann in der Lage ist, daraus eine gültige Signatur der ursprünglichen Nachricht zu berechnen. Des Weiteren wird mit der homomorphen Eigenschaft des Kryptosystems von Paillier ein sogenanntes Three-Pass-Protocol – auch No-Key-Protocol genannt – entwickelt. Das Protokoll erlaubt zwei Teilnehmern, eine Nachricht ohne vorherigen Schlüsselaustausch vertraulich zu übermitteln.

## 1 Grundlagen

Um den Artikel verständlicher zu machen, werden in diesem Abschnitt relevante mathematische Grundlagen des Kryptosystems von Paillier eingeführt. Alle Berechnungen werden modulo  $n^2$  durchgeführt, die Berechnungsgruppe ist also  $\mathbb{Z}_{n^2}^*$  mit Einselement.

**Definition 1.1.** Eine Zahl  $z \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$  ist ein  $n$ -Residuum modulo  $n^2$ , wenn es eine Zahl  $y \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$  gibt, so dass gilt:

$$z = y^n \bmod n^2.$$

Da der *Residuumsgrad* die zusammengesetzte Zahl  $n$  ist, spricht man von *zusammengesetztem Residuum*. Die Menge der  $n$ -Residuen ist eine multiplikative Untergruppe von  $\mathbb{Z}_{n^2}^*$  der Ordnung  $\phi(n)$ . Die Zahl  $y$  heißt *Residuumswurzel* oder kurz *Wurzel*. Jedes  $n$ -Residuum  $z$  hat genau  $n$  Residuumswurzeln. Die Menge aller Wurzeln von  $z$  wird mit  $\text{Roots}(z)$  bezeichnet. Es gibt genau eine Wurzel in  $\text{Roots}(z)$ , die kleiner als  $n$  ist und mit  $\sqrt[n]{z} = z^{1/n \bmod \lambda} \bmod n$  bezeichnet wird: die *Hauptwurzel*. Die Wurzeln des Einselements sind Zahlen der Form  $(1+n)^x = 1 + xn \bmod n^2$ .

**Lemma 1.2.** Es gilt  $\text{Roots}(1) = \langle 1+n \rangle$ .

*Beweis.*  $\text{Roots}(1)$  ist offensichtlich eine Untergruppe von  $\mathbb{Z}_{n^2}^*$  und es gilt  $\text{ord}(1+n) = n$ . Nun sei  $g \in \langle 1+n \rangle$ , dann gilt  $g = (1+n)^k$  und  $\text{ord}(g) = \frac{n}{\text{ggT}(n,k)}$ , die ein Teiler von  $n$  ist, d.h.  $g \in \text{Roots}(1)$ . Ferner haben die beiden Mengen die gleiche Ordnung, woraus die Behauptung folgt.  $\square$

---

\*anselme.tueno@googlemail.com

Nun sei  $u = (1+n)^t \in \text{Roots}(1)$ . Da  $t \leq n$  gilt, ist  $t$  der diskrete Logarithmus von  $u$  zur Basis  $1+n$ . Aus der Gleichung  $u = (1+n)^t = 1 + tn \bmod n^2$  folgt  $t = \frac{u-1}{n}$ . Daher ist für alle  $u \in \text{Roots}(1)$  die Funktion

$$L : u \mapsto \frac{u-1}{n}$$

wohldefiniert.

**Definition 1.3.** Eine *Residuenbasis* ist eine Zahl  $g \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$ , deren Ordnung durch  $n$  teilbar ist. Diese Definition reicht aber nicht aus, um eine Residuenbasis algorithmisch auswählen zu können. Folgende Lemmata sollen deshalb eine effiziente Auswahl einer Residuenbasis ermöglichen.

**Lemma 1.4.** Sei  $g = (1+n)^k$ . Dann ist  $g$  genau dann eine Residuenbasis wenn gilt:  $ggT(k, n) = 1$ .

*Beweis.* Ist  $g = (1+n)^k$  eine Residuenbasis, dann ist  $n$  ein Teiler von  $\text{ord}(g)$ . Gelte nicht  $ggT(k, n) = 1$ , dann ist  $k$  entweder gleich  $p$  oder  $q$  oder  $n$ .

Falls  $k = p$  (bzw.  $q$ ) dann gilt  $\text{ord}(g) = q$  (bzw.  $p$ ). Falls  $k = n$ , dann gilt  $\text{ord}(g) = 1$ . Dies steht im Widerspruch zur Annahme und somit muss  $ggT(k, n) = 1$  gelten.

Gilt umgekehrt  $ggT(k, n) = 1$ , dann gilt

$$\text{ord}((1+n)^k) = \frac{\text{ord}(1+n)}{ggT(\text{ord}(1+n), k)} = \frac{n}{ggT(n, k)} = n.$$

□

**Lemma 1.5.** Eine Zahl  $g \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$  ist genau dann eine Residuenbasis wenn gilt:

$$ggT(L(g^\lambda \bmod n^2), n) = 1. \quad (1)$$

*Beweis.* Nach Carmichael (Lemma 1.13) gilt  $g^\lambda \equiv 1 \bmod n$ . Daraus folgt  $g^\lambda \equiv 1 + kn \bmod n^2$  für ein  $k \in \mathbb{Z}_n$ .  $L(g^\lambda \bmod n^2)$  liefert  $k$  und das vorherige Lemma beendet den Beweis. □

Residuenbasen sind der Grundbaustein für die Verschlüsselungsfunktion des Kryptosystems von Paillier. Sei  $g \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$  eine Residuenbasis, dann kann man zeigen, dass sich jedes Element  $w \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$  als  $w = g^x \cdot y^n$  eindeutig darstellen lässt [7]. Dies wird als *Repräsentation* von  $w$  nach  $g$  bezeichnet. Folgende Funktion ist von daher wohldefiniert:

$$\begin{aligned} E_g : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n^* &\mapsto \mathbb{Z}_{n^2}^* \\ (x, y) &\mapsto g^x \cdot y^n \bmod n^2 \end{aligned}$$

**Lemma 1.6.** Die Funktion  $E_g$  ist bijektiv.

*Beweis.* Es gilt  $|\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n^*| = n \cdot \phi(n) = |\mathbb{Z}_{n^2}^*|$ . Es bleibt also die Injektivität zu zeigen. Seien  $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n^*$ , mit  $z_1$  und  $z_2$   $n$ -Residuen und angenommen  $E_g(x_1, z_1) = E_g(x_2, z_2)$ . Daraus folgt  $g^{x_1} \cdot z_1 = g^{x_2} \cdot z_2 \Leftrightarrow g^{x_2 - x_1} \cdot z_2 \cdot z_1^{-1} = 1$ . Aus der Eindeutigkeit der Darstellung des Einselements folgt  $x_1 = x_2$  und  $z_1 = z_2$ . □

Die Funktion  $E_g$  ist die Verschlüsselungsfunktion des Kryptosystems von Paillier. Mit  $D_g$  soll ihre Umkehrfunktion bezeichnet werden.

**Definition 1.7.** Sei  $g$  eine Residuenbasis und  $w \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$ . Die  $n$ -Residuenklasse  $[[w]]_g$  von  $w$  nach  $g$  ist die eindeutige Zahl  $x$ , so dass gilt:  $w = g^x \cdot z$ . Die Zahl  $z$  ist das dazugehörige Residuum  $\text{res}_g w$ . Aus dieser Definition lassen sich folgende Eigenschaften der Residuenklasse herausstellen.

**Lemma 1.8.**

- i.  $\forall w \in \mathbb{Z}_{n^2}^* \quad [[w]]_g = 0$  genau dann wenn  $w$  ein Residuum ist.
- ii. Die Funktion, die jedem Element von  $\mathbb{Z}_{n^2}^*$  seine Klasse zuweist, ist ein additiver Homomorphismus. Es gilt also:

$$\forall w_1, w_2 \in \mathbb{Z}_{n^2}^* \quad [[w_1 w_2]]_g = [[w_1]]_g + [[w_2]]_g \pmod{n}. \quad (2)$$

- iii. (Klassenformel)  $\forall g_1, g_2$  Residuenbasen und  $\forall w \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$  gilt:

$$[[w]]_{g_2} = [[w]]_{g_1} [[g_1]]_{g_2} \pmod{n} \quad (3)$$

*Beweis.*

- i. Aus  $[[w]]_g = 0$  folgt  $w = g^0 z = z$  ist ein Residuum. Sei umgekehrt  $w$  ein Residuum, dann gilt  $w = g^0 w$ , und damit gilt  $[[w]]_g = 0$ .
- ii. Seien  $w_1 = g^{c_1} z_1$  und  $w_2 = g^{c_2} z_2$ . Es gilt:  $w_1 w_2 = g^{c_1+c_2} z_1 z_2$ . Aus der Eindeutigkeit der Repräsentation folgt  $[[w_1]]_g [[w_2]]_g = [[w_1 w_2]]_g \pmod{n}$ .
- iii. Seien  $g_1, g_2$  Residuenbasen und  $w \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$ . Es gilt  $w = g_1^{c_1} z_1$ ,  $g_1 = g_2^\alpha \beta$  und  $\alpha c_1 = (\alpha c_1 \text{ div } n)n + (\alpha c_1 \bmod n)$ . Daraus folgt  $w = (g_2^\alpha \beta)^{c_1} z_1 = g_2^{\alpha c_1} \beta^{c_1} z_1 = g_2^{(\alpha c_1 \text{ div } n)n + (\alpha c_1 \bmod n)} \beta^{c_1} z_1 = g_2^{\alpha c_1 \bmod n} (g_2^{\alpha c_1 \text{ div } n})^n \beta^{c_1} z_1$  und dies ist eine Repräsentation von  $w$  nach  $g_2$ , denn  $(g_2^{\alpha c_1 \text{ div } n})^n \beta^{c_1} z_1$  ist ein Residuum und  $[[w]]_{g_1} = c_1$  und  $[[g_1]]_{g_2} = \alpha$ .

□

Als Verschlüsselungsfunktion muss  $E_g$  die Einwegeigenschaft erfüllen, d.h. einfach zu berechnen und schwierig zu invertieren sein; die Invertierung soll aber mit dem geheimen Schlüssel einfach berechenbar sein. Diese Funktion ist offensichtlich mit der schnellen Potenzierung einfach zu berechnen. Um die Invertierung durchführen zu können, muss man aus der Repräsentation  $w = g^x \cdot y^n$  in der Lage sein, die Residuenklasse  $x$  zu berechnen. Darüber hinaus wird in dem Kryptosystem  $y$  zufällig ausgewählt. Dies garantiert die sogenannte *semantische Sicherheit*: der gleiche Klartext wird auf verschiedene Chiffretexte abgebildet. Um dann zwei Chiffretexte des gleichen Klartextes unterscheiden zu können, muss der Angreifer die Residuosität entscheiden können.

**Definition 1.9. Problem der Residuenklasse.** Sei  $w \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$ , berechne die Klasse von  $w$ . Dieses Problem wird mit  $\text{CLASS}[n]$  bezeichnet.

**Definition 1.10. Problem der Entscheidbarkeit der Residuosität.** Sei  $w \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$ , entscheide, ob  $w$  ein Residuum ist. Dieses Problem wird  $\text{CR}[n]$  bezeichnet.

Auf diesen beiden Problemen und dem Faktorisierungsproblem des RSA-Moduls  $n$  basiert die Sicherheit des Kryptosystems von Paillier. Es ist nicht leicht zu beweisen, dass deren Berechnungen schwierig sind; man kann es nur vermuten.

**Vermutung 1.11. Composite Residuosity Assumption.** Wenn die Faktorisierung von  $n$  hart ist, gibt es keinen Algorithmus, der  $\text{CR}[n]$  in polynomialer Zeit löst. Diese Vermutung wird mit CRA bezeichnet und garantiert die semantische Sicherheit.

**Vermutung 1.12. Computational Composite Residuosity Assumption.** Wenn die Faktorisierung von  $n$  hart ist, dann gibt es keinen Algorithmus, der  $\text{CLASS}[n]$  in polynomialer Zeit

löst. Diese Vermutung wird als CCRA bezeichnet. Die Komplexität des Problems der Residuenklasse  $\text{CLASS}[n]$  garantiert die Einwegeigenschaft.

Diese Vermutungen garantieren die semantische Sicherheit und die Einwegeigenschaft. Kennt man aber den geheimen Schlüssel  $\lambda$ , ist man in der Lage, die Entschlüsselung einfach durchzuführen.

**Lemma 1.13 Carmichael.** Sei  $w \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$ , Es gelten:

$$w^\lambda \equiv 1 \pmod{n} \text{ und } w^{n\lambda} \equiv 1 \pmod{n^2}.$$

**Lemma 1.14.** Sei  $w \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$ , es gilt:

$$L(w^\lambda \pmod{n^2}) = \lambda [[w]]_{1+n} \pmod{n}.$$

*Beweis.* Aus Lemma 2.4 folgt, dass  $1+n$  eine Residuenbasis ist. Das Element  $w$  ist also nach  $1+n$  repräsentierbar und es gibt ein eindeutiges Paar  $(a, y) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n^*$ , so dass  $w = (1+n)^a y^n \pmod{n^2}$  gilt. Also  $[[w]]_{1+n} = a$ .

Nun

$$\begin{aligned} w^\lambda &= (1+n)^{a\lambda} y^{n\lambda} \\ &= (1+n)^{a\lambda} y^{n\lambda} \\ &= 1 + a\lambda n \pmod{n^2} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$L(w^\lambda \pmod{n^2}) = \frac{1 + a\lambda n - 1}{n} \pmod{n} = a\lambda \pmod{n} = \lambda [[w]]_{1+n} \pmod{n}$$

□

**Korollar 1.15.** Seien  $g$  Residuenbasis und  $w \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$ , Es gilt:

$$[[w]]_g = \frac{L(w^\lambda \pmod{n^2})}{L(g^\lambda \pmod{n^2})} \pmod{n}. \quad (4)$$

*Beweis.* Wegen der Klassenformel von Lemma 1.8 (3) gilt  $1 = [[1+n]]_{1+n} = [[w]]_g [[g]]_{1+n}$ . Daraus folgt, dass  $[[g]]_{1+n} = [[1+n]]_g^{-1} \pmod{n}$  invertierbar  $\pmod{n}$  ist. Damit ist auch  $L(g^\lambda \pmod{n^2}) = \lambda [[g]]_{1+n}$  invertierbar, da  $ggT(\lambda, n) = 1$  gilt. Aus der Klassenformel wiederum gilt  $[[w]]_{1+n} = [[w]]_g [[g]]_{1+n}$ . Daraus folgt:

$$[[w]]_g = \frac{[[w]]_{1+n}}{[[g]]_{1+n}} = \frac{\lambda [[w]]_{1+n}}{\lambda [[g]]_{1+n}} = \frac{L(w^\lambda \pmod{n^2})}{L(g^\lambda \pmod{n^2})}.$$

□

Der letzte Satz gibt also eine Formel (4) für die Berechnung der Klasse eines Elements  $w \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$ , die benutzt wird, um das Verfahren zu entschlüsseln. Die Berechnung ist offensichtlich bei bekanntem geheimem Schlüssel  $\lambda$  leicht durchzuführen.

## 2 Probabilistisches Schema

Im folgendem Kryptosystem wird eine Residuenbasis mit der Gleichung (1) ausgewählt, eine Nachricht mittels der Funktion  $E_g$  verschlüsselt und der Formel aus Gleichung (4) entschlüsselt. Auf Basis dieses Kryptosystems hat Paillier auch eine Einweg-Falltürpermutation und ein Signaturverfahren entwickelt.

<b>Schlüsselgenerierung</b>	Große Primzahlen $p$ und $q$ selber Länge ( $p \neq q$ ) : $n = pq$ , Residuenbasis $g \in_R \mathbb{Z}_{n^2}^*$ mit $ggT(L(g^\lambda \bmod n^2), n) = 1$ Öffentlicher Schlüssel: $(n, g)$ , Privater Schlüssel: $(p, q)$ bzw. $\lambda = kgV(p-1, q-1)$
<b>Verschlüsselung</b>	Klartext: $m \in \mathbb{Z}_n$ , Zufallszahl: $x \in_R \mathbb{Z}_n^*$ , Chiffretext: $c = g^m x^n \bmod n^2$
<b>Entschlüsselung</b>	Chiffretext: $c < n^2$ , Klartext: $m = \frac{L(c^\lambda \bmod n^2)}{L(g^\lambda \bmod n^2)} \bmod n$

**Bemerkung 2.1.** Das obige Kryptosystem ist wegen der Zufallszahl  $x$  probabilistisch. Die Korrektheit wurde mit Korollar 1.15 bewiesen. Die Sicherheit basiert auf den obigen vorgestellten Problemen.

**Theorem 2.2.** Das probabilistische Kryptosystem von Paillier hat genau dann die Einwegeigenschaft wenn CCRA gilt.

**Theorem 2.3.** Das probabilistische Kryptosystem von Paillier ist genau dann semantisch sicher, wenn CRA gilt.

*Beweis.* Seien  $m_0, m_1$  zwei Klartexte und  $c$  ein Chiffretext eines von den Beiden. Um die semantische Sicherheit zu brechen, muss der Angreifer entscheiden können, wessen Chiffretext  $c$  ist. Für  $i \in \{0, 1\}$  ist  $c$  ein Chiffretext von  $m_i$  genau dann, wenn  $cg^{-m_i} \bmod n^2$  ein  $n$ -Residuum ist. Der Angreifer muss also in der Lage sein CRA zu lösen.  $\square$

Da der Klartext  $m \in \mathbb{Z}_n$  und  $c < n^2$  hat dieses Schema einen Expansionsfaktor<sup>1</sup> von  $(\log(n))/(\log(n^2)) = 1/2$ , d.h. der Chiffretext ist doppelt so lang wie der Klartext. Dies kann verbessert werden indem  $m$  aus  $\mathbb{Z}_{n^2}$  ausgewählt und als Paar  $(m_1, m_2)$  von Zahlen dargestellt wird, wobei  $ggT(m_2, n) = 1$  und  $m_1 < n$  gelten müssen. Das resultierende System ist eine *Einweg-Falltürpermutation*. Paillier hat die  $n$ -adische Darstellung von  $m$  vorgeschlagen. Es wird zunächst das System wie in [5] vorgestellt und dann dessen Korrektheit diskutiert.

<b>Schlüsselgenerierung</b>	Große Primzahlen $p$ und $q$ selber Länge ( $p \neq q$ ) : $n = pq$ , Residuenbasis $g \in_R \mathbb{Z}_{n^2}^*$ mit $ggT(L(g^\lambda \bmod n^2), n) = 1$ Öffentlicher Schlüssel: $(n, g)$ , Privater Schlüssel: $(p, q)$ bzw. $\lambda = kgV(p-1, q-1)$
<b>Verschlüsselung</b>	Klartext: $m \in \mathbb{Z}_{n^2}$ , $m_1 = m \bmod n$ und $m_2 = m \div n$ , Chiffretext: $c = g^{m_1} m_2^n \bmod n^2$
<b>Entschlüsselung</b>	Schritt1: $m_1 = \frac{L(c^\lambda \bmod n^2)}{L(g^\lambda \bmod n^2)} \bmod n$ Schritt 2: $z = cg^{-m_1} \bmod n$ , Schritt 3: $m_2 = z^{1/n \bmod \lambda} \bmod n$ , Schritt 4: Klartext $m = m_2 n + m_1$

<sup>1</sup>Verhältnis zwischen der Länge des Klartextes und der des Chiffretextes.

Die Entschlüsselung der Einweg-Falltürpermutation wird in vier Schritten durchgeführt. Im ersten Schritt wird  $m_1$  mit (4) berechnet. Das Residuum  $z = \text{res}_g c$  wird im zweiten Schritt berechnet. Im dritten Schritt wird  $m_2$  als die Hauptwurzel von  $z$  berechnet. Die  $n$ -adische Entwicklung von  $m$  wird im vierten Schritt berechnet und damit ist der Klartext gewonnen. Mit der  $n$ -adischen Darstellung  $m = m_2 n + m_1$  gilt aber nicht immer  $ggT(m_2, n) = 1$  und damit kann das Schema nicht für alle Klartexte korrekt sein.

**Bemerkung 2.4.** Ist der Klartext  $m$  kleiner  $n$ , dann gilt  $m_2 = 0$  und damit  $c = 0$ . Daher können Klartexte kleiner als  $n$  nicht verschlüsselt werden. Das Schema ist in diesem Fall deterministisch und kann daher nicht semantisch sicher sein.

### 3 Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden zwei Eigenschaften des probabilistischen Kryptosystems von Paillier vorgestellt, die wichtig sind, um kryptographische Protokolle zu entwickeln.

#### 3.1 Homomorphie

Bezüglich der Anwendungen ist diese Eigenschaft die wichtigste und folgt aus dem additiven Homomorphismus von Lemma 1.8 (2).

Seien  $m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_n, k \in \mathbb{N}$  und  $g$  eine Residuenbasis, so gelten folgende Gleichungen:

$$D_g(E_g(m_1)E_g(m_2) \bmod n^2) = m_1 + m_2 \bmod n \quad (5)$$

$$D_g(E_g(m)^k \bmod n^2) = km \bmod n \quad (6)$$

$$D_g(E_g(m_1)g^{m_2} \bmod n^2) = m_1 + m_2 \bmod n \quad (7)$$

$$D_g(E_g(m_1)^{m_2} \bmod n^2) = m_1 m_2 \bmod n \quad (8)$$

Diese Eigenschaft ist notwendig, um kryptographische Protokolle zu entwickeln, bei denen mit verschlüsselten Daten gerechnet werden muss. Dazu zählen beispielsweise elektronische Wahlen, Secret Sharing, Copyright etc. Das im 5. Abschnitt vorgestellte Three-Pass-Protokoll basiert auf Gleichung (8).

#### 3.2 Self-Blinding

Mit dieser Eigenschaft ist es möglich, einen Chiffretext in einen anderen Chiffretext umzuwandeln, ohne den jeweiligen Klartext zu kennen.

Für alle  $m \in \mathbb{Z}_n, x \in \mathbb{Z}_n^*, r \in \mathbb{N}$  und  $g$  eine Residuenbasis gelten die Beziehungen:

$$D_g(E_g(m)x^n \bmod n^2) = m \quad (9)$$

$$D_g(E_g(m)g^{nr} \bmod n^2) = m \quad (10)$$

Wie blinde Signaturen ermöglicht diese Eigenschaft die Entwicklung von kryptographischen Protokollen wie elektronischen Zahlungssystemen, bei denen die Anonymität gefordert wird.

### 4 Digitale Signatur

Um mit dem probabilistischen Kryptosystem signieren zu können, konstruiert Paillier folgendes Signaturverfahren, bei dem die Schlüsselgenerierung erhalten bleibt.

Signaturalgorithmus	Klartext: $m \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$ , $s_1 = \frac{L(m^\lambda \bmod n^2)}{L(g^\lambda \bmod n^2)} \bmod n$ , $s_2 = (mg^{-s_1})^{1/n \bmod \lambda} \bmod n$ , Signatur: $\sigma(m) = (s_1, s_2)$
Verifikationsalgorithmus	$m \stackrel{?}{=} g^{s_1} s_2^n \bmod n^2$
Korrektheit	$g^{s_1} s_2^n = g^{s_1} m g^{-s_1} = g^{s_1} g^{-s_1} m = m$

In der Praxis wird nicht der Klartext  $m$  selbst signiert, sondern dessen Hashwert. Dafür wird eine Hashfunktion  $h : \mathbb{N} \mapsto \{0,1\}^k \subset \mathbb{Z}_{n^2}^*$  benötigt. Man ersetze also im obigen Schema  $m$  durch  $h(m)$ .

Manchmal ist es wünschenswert, dass der Inhalt der Nachricht dem Signierer geheim bleibt. Dieses Problem wurde in [2] von David Chaum mit blinden digitalen Signaturen gelöst. Dabei signiert ein Teilnehmer B eine Nachricht für einen anderen Teilnehmer, ohne den Inhalt der Nachricht nachvollziehen zu können.

**Definition 4.1.** Ein blindes digitales Signaturschema ist ein Signaturschema mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

- Es gibt zwei Teilnehmer: den Signierer und den Provider
- Nur der Signierer kann eine Signatur erzeugen
- Der Provider kennt allein eine invertierbare Funktion, mit der er seine Nachricht blenden kann, bevor sie zum Signieren geschickt wird.

Sei  $n$  ein RSA-Modul,  $e$  bzw.  $d$  der öffentliche bzw. private RSA-Schlüssel. Folgendes Beispiel von D. Chaum erläutert, wie man mit RSA eine Nachricht  $m$  blind signieren kann.

**Beispiel 4.2.** Der Provider will seine Nachricht  $m$  blind signieren. Er blendet  $m$ , indem er eine Zufallszahl  $r \in_R \mathbb{Z}_n^*$  auswählt und  $M = mr^e \bmod n$  berechnet. Der Signierer bekommt die Nachricht  $M$  und versieht sie mit der RSA-Signatur  $\sigma(M)$ . Um die Signatur der ursprünglichen Nachricht  $m$  zu bekommen, multipliziert der Provider  $\sigma(M)$  mit  $r^{-1}$ . Denn es gilt:

$$\sigma(M) = M^d = (mr^e)^d = m^d r^{ed} = m^d r = \sigma(m)r \bmod n.$$

Es kann ohne zusätzliche Schwierigkeit verifiziert werden, dass  $\sigma(m)$  tatsächlich eine Signatur von  $m$  ist. Das Prinzip von Chaum wird nun auf das Signaturschema von Paillier angewendet und führt damit ein Signaturverfahren ein, das ermöglicht, blinde Signaturen zu erzeugen.

**Theorem 4.3.** Seien  $x \in_R \mathbb{Z}_n^*$ ,  $m \in_R \mathbb{Z}_{n^2}^*$  eine Nachricht und  $M = mx^n$  eine Verblendung von  $m$ . Ferner sei  $\sigma(M) = (s_1, s_2)$  die Paillier-Signatur von  $M$ . Dann ist  $\sigma(m) = (s_1, s_2 x^{-1} \bmod n)$  eine gültige Signatur von  $m$ .

*Beweis.* Es gilt:

$$M^\lambda \bmod n^2 = (mx^n)^\lambda \bmod n^2 = m^\lambda x^{n\lambda} \bmod n^2 = m^\lambda \bmod n^2,$$

da aus dem Satz von Carmichael  $x^{n\lambda} \equiv 1 \bmod n^2$  gilt.

Also die Signatur  $\sigma(M) = (s_1, s_2)$  mit:

$$s_1 = \frac{L(M^\lambda \bmod n^2)}{L(g^\lambda \bmod n^2)} \bmod n = \frac{L(m^\lambda \bmod n^2)}{L(g^\lambda \bmod n^2)} \bmod n$$

und

$$\begin{aligned}
s_2 &= (mx^n g^{-s_1})^{1/n \bmod \lambda} \bmod n \\
&= (mg^{-s_1})^{1/n \bmod \lambda} (x^n)^{1/n \bmod \lambda} \bmod n \\
&= x(mg^{-s_1})^{1/n \bmod \lambda} \bmod n
\end{aligned}$$

Eine gültige Signatur von  $m$  ist also  $\sigma(m) = (s_1, s_2 x^{-1} \bmod n)$ .  $\square$

## 5 Three-Pass-Protocol

### 5.1 Definition

Ein Three-Pass-Protocol ist ein Protokoll, das erlaubt eine Nachricht vertraulich ohne Schlüsselaustausch zu senden. Sender und Empfänger müssen dabei genau drei verschlüsselte Nachrichten austauschen, daher der Name. Das Protokoll benutzt eine Chiffrierfunktion  $E$  mit privatem Chiffrierschlüssel  $e$  und eine Dechiffrierfunktion  $D$  mit ebenfalls privatem Dechiffrierschlüssel  $d$ , so dass  $D(d, E(e, m)) = m$  gilt. Die Verschlüsselung soll kommutativ sein, das heißt es soll für alle Schlüssel  $a$  und  $b$  und alle Nachrichten  $m$  gelten:  $E(a, E(b, m)) = E(b, E(a, m))$  und umgekehrt  $D(d, E(k, E(e, m))) = D(d, E(e, E(k, m))) = E(k, m)$ .

Ursprünglich wurde das Protokoll von Adi Shamir eingeführt und wird als Shamir No-Key-Protocol bezeichnet, weil Sender und Empfänger keinen Schlüssel austauschen. Es wird zunächst das Protokoll von Shamir vorgestellt und im Anschluss daran ein No-Key-Protocol basierend auf dem Kryptosystem von Paillier eingeführt.

### 5.2 Three-Pass-Protocol von Shamir

Jeder Teilnehmer besitzt zwei private Schlüssel jeweils für Ver- und Entschlüsselung. Das Protokoll basiert auf Potenzierung modulo einer großen Primzahl  $p$ . Teilnehmer  $T$  erzeugt für die Kommunikation einen Schlüssel  $e_T$  mit  $e_T < p - 1$  welcher relativ prim zu  $p - 1$  ist. Dann bestimmt er das Inverse  $d_T$  von  $e_T$  modulo  $p - 1$ , es gilt also  $e_T * d_T \equiv 1 \bmod p - 1$ . Aufgrund des kleinen Satzes von Fermat gilt für alle Nachrichten  $m$ :

$$(m^{e_T})^{d_T} = m^{e_T * d_T} = m^{k * (p-1) + 1} \equiv m \bmod p$$

Das Protokoll ist dem Verfahren von Diffie und Hellman sehr ähnlich, jedoch ohne Schlüsselaustausch.  $A$  und  $B$  seien die zwei Teilnehmer des Verfahrens.  $A$  möchte eine Nachricht  $m$  an  $B$  senden. Er berechnet  $M_1 = m^{e_A} \bmod p$  und sendet  $M_1$  zu  $B$ .  $B$  potenziert  $M_1$  mit seinem privaten Schlüssel und sendet  $M_2 = M_1^{e_B} = m^{e_A * e_B} \bmod p$  zu  $A$ .  $A$  entschlüsselt  $M_2$  indem er  $M_3 = M_2^{d_A} = (m^{e_A * e_B})^{d_A} \bmod p = m^{e_B} \bmod p$  berechnet. Dann erhält  $B$   $M_3$  und kann nun die ursprüngliche Nachricht mit  $M_3^{d_B} = (m^{e_B})^{d_B} \bmod p = m \bmod p$  berechnen.

Eine Verbesserung ist das Massey-Omura Kryptosystem mit Potenzierung in dem Galois-Körper  $GF(2^n)$ . Die Sicherheit ist gewährleistet, da der Angreifer keine Information über die Nachrichten  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  herleiten kann. Beide Verfahren sind anfällig gegen Man-In-The-Middle-Attacken. Aufgrund des Problems des diskreten Logarithmus ist es jedoch unmöglich, die Schlüssel der Teilnehmer aus einem der ausgetauschten Chiffretexte zu erschließen.

### 5.3 Three-pass-Protocol mit Paillier

In diesem Abschnitt wird ein Three-Pass-Protocol basierend auf dem Paillier-Kryptosystem vorgeschlagen. Zum Verfahren von Shamir gibt es zwei wesentliche Unterschiede:

- das hier beschriebene Protokoll benutzt anstelle der Kommutativität die homomorphe Eigenschaft des Paillier-Kryptosystems. Denn es gilt:

$$D((E(m_1))^{m_2} \bmod n^2) = m_1 m_2 \bmod n.$$



- nur der Sender besitzt Schlüssel, und nur er muss verschlüsseln. Der Empfänger berechnet nur eine modulare Potenz und am Ende eine Multiplikation mit einer Inversen.

$A$  möchte eine Nachricht  $m_1$  zu  $B$  senden.

1.  $A$  verschlüsselt  $m_1$  mit Paillier, in dem er  $M_1 = g^{m_1} y^n \bmod n^2$  berechnet. Er sendet  $M_1$  zu  $B$ .
2.  $B$  wählt eine Nachricht  $m_2 < n$  mit  $\text{ggT}(m_2, n) = 1$  und damit potenziert er  $M_1$ :

$$M_2 = M_1^{m_2} \bmod n^2 = (g^{m_1} y^n)^{m_2} \bmod n^2 = g^{m_1 m_2} (y^{m_2})^n \bmod n^2$$

$B$  sendet  $M_2$  zurück zu  $A$ .

3. Mit der Entschlüsselung von Paillier berechnet  $A$   $M_3 = D(M_2) = m_1 m_2 \bmod n$ .
4.  $B$  bekommt die Zahl  $M_3$  und berechnet  $M_3 * m_2^{-1} \bmod n$ , und es kommt  $m_1$  heraus.

## 6 Sicherheit des Protokolls

Die Nachrichten  $M_1$  und  $M_2$  sind Paillier-Chiffres und somit unter den Annahmen des zusammengesetzten Residuums sicher. Aus  $M_3$  kann der Angreifer vermutlich keine Information über  $m_1$  bekommen, wenn  $m_2$  zufällig ausgewählt wird. Eine bessere Sicherheit erhält man indem das Prinzip von David Chaum benutzt wird. Dabei wählt  $B$  nicht irgendeine Zahl  $m_2$  sondern er wählt  $m_2$  als  $n$ -Residuum modulo  $n$ . Das heißt  $B$  wählt zufällig eine Zahl  $x \in_R \mathbb{Z}_n^*$  und berechnet  $m_2 = x^n \bmod n$ . Dies führt dazu, dass  $M_3$  die Form  $M_3 = m_1 x^n \bmod n$  hat, die nach Chaum eine Verblendung von  $m_1$  und somit sicher ist.

Das Protokoll ist wie beim Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch und Shamirs No-Key Protocol anfällig gegen Man-In-The-Middle-Attacken, sobald ein Angreifer in der Lage ist, Nachrichten zu erzeugen bzw. abzufangen und zu ersetzen. Das Problem kann durch ein zusätzliches Authentifizierungs-Protokoll behoben werden.

## 7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden zwei kryptographische Verfahren eingeführt, die aus dem homomorphen Kryptosystem von Paillier basieren.

Das Signaturschema von Paillier wurde mit dem gleichen Prinzip von David Chaum für blinde RSA-Signaturen in ein blindes Signaturschema umgewandelt. Dabei blendet man eine Nachricht  $m$  mit einem zufällig gewählten Residuum  $x^n$ , bevor sie zum Signierer geschickt wird. Wenn man dann die Signatur der geblendeten Nachricht bekommt, muss nur der zweite Signaturteil mit  $x^{-1} \bmod n$  multipliziert werden, um die Signatur der ursprünglichen Nachricht  $m$  zu haben.

Das hier entwickelte No-Key-Protokoll wurde durch die homomorphe Eigenschaft des Paillier-Verfahrens ermöglicht. Im Gegensatz zu dem No-Key-Protocol von Shamir muss nur der Sender ver- und entschlüsseln. Der Empfänger wählt zufällig eine mit  $n$  teilerfremde Zahl und berechnet nur eine modulare Potenz und am Schluss die Multiplikation mit einer modularen Inversen. Das Protokoll ist anfällig gegen Man-In-The-Middle-Attacken und benötigt daher zusätzlich eine Authentifizierung. Eine andere Lösung bieten Quanten-Algorithmen. In [3] und [8] sind Quantum No-Key-Protocols vorgestellt worden, die gegen Man-In-The-Middle-Attacken resistent sind, weil das Abhören des Kanals aufgrund quantenmechanischer Gesetze leicht zu bemerken ist.

Des Weiteren wurde festgestellt, dass die Einweg-Falltürpermutation zwar theoretisch bijektiv ist und den Expansionfaktor verbessert, jedoch auf Kosten der Korrektheit. Sie kann nämlich nicht für alle Klartexte korrekt sein. Die Korrektheit ist für eine Nachricht  $m \in \mathbb{Z}_{n^2}$  nur dann gewährleistet, wenn sich  $m$  in  $(m_1, m_2)$  darstellen lässt, wobei  $m_1 < n$  und  $\text{ggT}(m_2, n) = 1$  gelten müssen.

## 8 Danksagung

Diese Arbeit ist aus der Diplomarbeit des Autors entstanden. Er möchte deshalb seiner Betreuerin Prof. Dr. Elena Fimmel sehr herzlich bedanken, für den Vorschlag eines so interessanten Themas, ihr Verständnis, und die Mühe diese Arbeit zu lesen und zu begutachten.

## 9 Notationen

$kgV(a, b)$ : kleinstes gemeinsames Vielfaches von  $a$  und  $b$

$ggT(a, b)$ : größter gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$

$n = pq$ : RSA-Zahl, wobei  $p$  und  $q$  zwei ungleiche große Primzahlen sind

$\phi(n)$ : Eulersche  $\phi$ -Funktion von  $n$

$\lambda(n) = kgV(p-1, q-1)$ : Carmichaelfunktion<sup>2</sup> von  $n$

$ord(g) = \min(\{e : g^e \bmod n^2 = 1\})$ : Ordnung von  $g$  modulo  $n^2$

$[[w]]$ : Residuenklasse von  $w$

## 10 Literatur

- [1] Robert Daniel Carmichael: Note On A New Number Theory Function, Bull. Amer.Math. Soc. 16, pp. 232-238, 1910, <http://projecteuclid.org/>
- [2] David Chaum: Blind Signatures for Untraceable Payments, Advances in Cryptology Proceedings of Crypto 82, D. Chaum, R.L. Rivest, & A.T. Sherman (Eds.), Plenum, pp. 199-203.
- [3] Yoshito Kanamori, Seong-Moo Yoo: Quantum Three-Pass Protocol: Key Distribution Using Quantum Superposition States <http://airccse.org/journal/nsa/0709s6.pdf>
- [4] Alfred J. Menezes, Paul C. van Oorschot, Scott A. Vanstone: Handbook of Applied Cryptography, CRC Press, 1996, <http://www.cacr.math.uwaterloo.ca/hac>
- [5] Pascal Paillier: Public-Key Cryptosystems Based on Composite Degree Residuousity Classes. Advances in Cryptology, Proceedings of EUROCRYPT '99, LNCS 1592, Springer Verlag, pp. 223-238, 1999.
- [6] Pascal Paillier: A New Trapdoor Permutation Equivalent to Factoring, Proceedings of PKC'99, LNCS 1560, Springer Verlag, 1999.
- [7] Pascal Paillier: Cryptographie À Clé Publique Basée Sur La Résiduosit  De Degr  Composite, PhD Thesis, 2001, <http://www.gemplus.com/smart/rd/publications/pdf/Pai99phd.pdf>
- [8] Li Yang: Quantum no-key protocol for direct and secure transmission of quantum and classical messages, <http://arxiv.org/ftp/quant-ph/papers/0309/0309200.pdf>

---

<sup>2</sup>Aus  bersichtlichkeitgr nden wird in dieser Arbeit  $\lambda(n)$  nur noch mit  $\lambda$  bezeichnet, falls nichts anders erw hnt wird.